

Reinhard Winkler
TU Wien

Die reellen Zahlen sind anders

Die Einführung der fundamentalen Zahlenbereiche erfolgt meist in der Reihenfolge: natürliche \mathbb{N} , ganze \mathbb{Z} , rationale \mathbb{Q} , reelle \mathbb{R} und schließlich komplexe Zahlen \mathbb{C} . Und das aus gutem Grunde, ergibt sich doch der nächst umfassende Bereich aus seinem jeweiligen Vorgänger stets als (minimale) Erweiterung, welche bestimmte zusätzliche gewünschte Eigenschaften besitzt. Dabei fällt auf, dass die Schritte von \mathbb{N} auf \mathbb{Z} , von \mathbb{Z} auf \mathbb{Q} und von \mathbb{R} auf \mathbb{C} relativ einfachen algebraischen Konstruktionen entsprechen (Hinzufügen negativer Elemente, Einführung der Brüche, Adjunktion der imaginären Einheit). Im Vergleich dazu bedeutet zu Beginn die Konstruktion der natürlichen Zahlen gleichsam aus dem Nichts ein tiefes Eintauchen in den Bereich logischer, mengentheoretischer, ja philosophischer Grundlagen des Zahlbegriffs (vgl. meinen Beitrag aus dem Vorjahr unter dem Titel "Wir zählen bis drei – und sogar darüber hinaus") .

Von grundsätzlich anderer Natur, aber mindestens ebenso bemerkenswert ist der Schritt von den rationalen zu den reellen Zahlen, mit dem ich mich diesmal beschäftigen möchte. Neben einer kurzen Diskussion der üblichen Konstruktionsmethoden (dedekindsche Schnitte, metrische Vervollständigung mittels Cauchyfolgen, Intervallschachtelung, unendliche Dezimalbrüche) und ihrer Unterschiede möchte ich herausarbeiten, inwiefern sie einander doch auch ähneln beziehungsweise sogar äquivalent sind.

In Verbindung damit stehen abstrakte Charakterisierungen und Axiomatisierungen von \mathbb{R} . Dabei beleuchte ich auch Aspekte der Darstellung und algorithmisch-rechnerischen Behandlung reeller Zahlen. Den Titel des Vortrags möchte ich durch philosophische Erwägungen untermauern, die das Wesen der reellen Zahlen betreffen, als Einzelobjekte sowie als Gesamtheit, insbesondere als jener Struktur, die die Grundlage bildet für jegliches Messen.

Als Konsequenz setzt Einsicht in die meisten (nicht nur physikalischen) Phänomene der uns umgebenden Realität ein hinreichendes mathematisches Verständnis der wesentlichen Eigenschaften der reellen Zahlen voraus, die deshalb als das (neben den natürlichen Zahlen, mit denen wir zählen) wichtigste mathematische Modell schlechthin gelten können.